数理解析研究所講究録 1422 巻 2005 年 99-105

相関関数の代数的表示（非斉次XXX模型の場合）

東大数理科学研究科
神保道夫

本稿では可積分模型の相関関数の表示に関する一つの話題について述べる。

1. BKS Ansatz

可積分スピン鎖の典型例であるXXXモデルを考えよう。

$$H := -\sum_{j=1}^{L}\left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x+\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y+\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right).$$

ここで σ_j^α $(\alpha=x,y,z,\ \sigma_{L+1}^\alpha=\sigma_1^\alpha)$ はサイト j に働くパウリ行列をあらわす。このハミルトニアンは R 行列

$$R(\lambda) := \rho(\lambda)\frac{\lambda+P}{\lambda+1} \quad \in \mathrm{End}(V\otimes V)$$

から転送行列を経由して周知の原理で作られるものである。ここで $V=\mathbb{C}^2$, $P(u\otimes v)=v\otimes u$, また規格化因子 $\rho(\lambda)$ は

$$\rho(\lambda) := -\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)} \tag{0.1}$$

で与えられる[1]。

XXXモデルの可積分性はYang-Baxter方程式に基づいており、各格子点 j に独立にスペクトル・パラメータ λ_j を導入した非斉次モデルでも可積分性は保たれる。このような一般化は理論的考察に重要である（Baxter）。以下では、サイト j に働く行列単位 $E_{\epsilon,\bar\epsilon}=(\delta_{\epsilon,a}\delta_{\bar\epsilon,b})_{a,b=+,-}$ の積の相関関数

$$h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n}^{\bar\epsilon_1,\cdots,\bar\epsilon_n} = \langle (E_{\epsilon_1,\bar\epsilon_1})_1\cdots(E_{\epsilon_n,\bar\epsilon_n})_n\rangle$$

を、非斉次パラメータ $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ の関数と考えて考察する。ただし $\langle \mathcal{O}\rangle=\lim_{L\to\infty}\langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle$ は H の基底状態 $|\psi\rangle$ に関する平均値をあらわす。

---

[1]対応する古典統計モデルの分配関数を1と規格化している。

物理的に興味のある斉次鎖 $(\lambda_1=\cdots=\lambda_n)$ の場合, $n=1,2$ の答は古くから計算され, また $n=3$ は $\zeta(3)$ ($\zeta(s)$ はリーマンゼータ) で表わされることが知られていた [10]。一般に h_n は、ある qKZ 方程式の解 $g_{2n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{2n})$ から変数の特殊化

$$h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=g_{2n}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_n+1,\cdots,\lambda_1+1)$$

によって得られ、初等関数の多重積分による表示を持つことがわかっている [6, 9]。しかし最近まで個々の積分の詳しい解析は行われていなかった。

Boos-Korepin[2] はこの積分を $n=3,4,\cdots$ の場合に実行し、答が一般に $\log 2$ と $\zeta(3),\zeta(5),\zeta(7),\cdots$ の有理数係数の多項式になるであろうと予想した。一般に qKZ 方程式の解の積分表示は本質的に多重積分であり、form factor 理論に現われる「レベル 0」の場合以外は 1 重積分に帰着することは期待できない。Boos-Korepin の計算では常に 1 重積分に帰着する点が不思議であった。Boos-Korepin-Smirnov[3]–[5] は、相関関数を記述する「レベル -4」の qKZ 方程式の解が「レベル 0」の qKZ 方程式の基本行列解の逆行列を用いて得られることに基づいて、この現象に説明を与えた。[4] はさらに非斉次パラメタの関数として関数 h_n が次の表示を持つと予想した：

$$\begin{aligned}h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=&\sum_{m=0}^{[n/2]}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_m\\ i_1<j_1,\cdots,i_m<j_m}}\prod_{p=1}^{m}\omega(\lambda_{i_p}-\lambda_{j_p})\\ &\times p_{n,(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).\end{aligned}\tag{0.2}$$

ここで $\omega(\lambda)$ は R 行列の規格化因子 (0.1) の対数微分

$$\omega(\lambda):=\frac{d}{d\lambda}\log\rho(\lambda)+\frac{1}{2(\lambda^2-1)},$$

また $p_{n,(i_1,j_1),\cdots,(i_m,j_m)}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ は有理関数である。本稿では (0.2) の形の公式を BKS Ansatz と呼ぶことにする。

BKS Ansatz と本来の Boos-Korepin の予想との関係は次のとおりである。相関関数は斉次極限 $\lambda_j\to\lambda$ で正則であることがわかっている。Ansatz に現われる有理関数 p_n は対角線集合 $\lambda_i=\lambda_j$ に極を持つが, それらは互いにキャンセルしなければならない。これから斉次極限は $\omega(\lambda)$ の高次のテーラー係数を用いて表わされることになり、

$$\omega(\lambda)-\frac{1}{2(\lambda^2-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta_a(2k+1)\lambda^{2k}\qquad(\zeta_a(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s))$$

から ζ 関数が現われる。

BKS Ansatz の係数の有理関数は非常に複雑で[2]、斉次極限をとることが困難という深刻な欠陥を持っている。しかし、(特殊化された)qKZ 方程式の解が積分なしにただ一つの超越関数 $\omega(\lambda)$ を用いて表示できる点は興味深い。[4, 5] では qKZ 方程式の解から変数を特殊化する際に、有理関数の挙動にある仮定をおいて Ansatz を導

[2]一種の部分分数分解である

いているが, 証明は不完全であった。BKS Ansatz の証明と有理関数 p_n の記述は [1] で得られた。本稿ではその概要を紹介する。(ただし [1] の記号を若干変更する。)

2. 相関関数の性質

今後は

$$h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\sum h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^{\bar{\epsilon}_1,\cdots,\bar{\epsilon}_n}_{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n}E_{\epsilon_1,\bar{\epsilon}_1}\otimes\cdots\otimes E_{\epsilon_n,\bar{\epsilon}_n}$$

とおいてこれを行列値関数と見なす。h_n について知られている主要な性質は次の 3 つである。

$$\begin{aligned}
&P_{j\,j+1}R_{j\,j+1}(\lambda_{jj+1})h_n(\cdots,\lambda_j,\lambda_{j+1},\cdots)\\
&\qquad=h_n(\cdots,\lambda_j,\lambda_{j+1},\cdots)P_{j\,j+1}R_{j\,j+1}(\lambda_{jj+1}), &(0.3)\\
&h_n(\lambda_1-1,\cdots,\lambda_n)=(-1)^{n-1}C_1\left(R_{1n}(\lambda_{1n})\cdots R_{12}(\lambda_{12})h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\right)^{t_1}C_1^{-1}\\
&\qquad\qquad\times R_{1n}(\lambda_{1n}-1)\cdots R_{12}(\lambda_{12}-1), &(0.4)\\
&\mathrm{tr}_1 h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\frac{1}{2}h_{n-1}(\lambda_2,\cdots,\lambda_n). &(0.5)
\end{aligned}$$

ここで R_{ij}, C_1 などの添え字はテンソル積の成分をあらわし, t_1 は第 1 成分についての転置を示す。また $\lambda_{ij}=\lambda_i-\lambda_j$, $C=i\sigma^y$ とおいた。(0.3) と (0.4) は qKZ 方程式の特殊化に当たる。さらに積分表示から、次の解析性がわかる：

$$h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\ \text{は}\ \lambda_i-\lambda_j\in\mathbb{Z}\backslash\{0,\pm1\}\ \text{にたかだか simple pole, 他で正則},$$

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to\infty\\ \lambda_1\in S_\delta}} h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\frac{1}{2}\otimes h_{n-1}(\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

ただし $S_\delta:=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\delta<|\arg\lambda|<\pi-\delta\}$. 以下の解析の結果として $h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ はこれらの性質から一意的に定まることがわかる。

なお $P_{12}^-=(1-P_{12})/2$ とおくとき, (0.4),(0.5) から次の式が従う：

$$P_{12}^-h_n(\lambda_2-1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)=P_{12}^-\otimes h_{n-2}(\lambda_3,\cdots,\lambda_n). \tag{0.6}$$

3. 留数の計算

BKS Ansatz が成り立つものとすると、有理関数の部分はどのように決めればよいであろうか。この節ではその計算のあらすじを述べる。

いま (0.4) の両辺で $\lambda_1=\lambda_2-1$ の留数をとると、(0.6) より大雑把に言って

$$\mathrm{res}_{\lambda_1=\lambda_2-2}h_n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=R\cdots R\cdot h_{n-2}(\lambda_3,\cdots,\lambda_n)\cdot R\cdots R$$

という形の式が得られる。(0.4) を繰り返し適用することにより一般に $\lambda_1=\lambda_2-k-1$ での留数は h_{n-2} に沢山の R 行列を両側から掛けた形で得られる。詳しく見ると、実は R 行列の積の部分は R 行列を k 回 fusion したもののトレースで書くことができる。

いま E, F, H を $\mathfrak{sl}_2$ の標準基として L 行列を

$$L(\lambda) := \lambda + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}H \otimes \sigma^z + E \otimes \sigma^- + F \otimes \sigma^+ \quad \in U(\mathfrak{sl}_2) \otimes \mathrm{End}(V)$$

で定めよう。$\pi^{(k)} : U(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(V^{(k)})$ を $k+1$ 次元の既約表現とする。このとき任意の $a \in U(\mathfrak{sl}_2)$ に対して $\mathrm{tr}_{V^{(k)}}\pi^{(k)}(a)$ は次元 $k+1 = \mathrm{tr}(1)$ について多項式であることが容易にわかる。この多項式を $\mathrm{Tr}_{k+1}(a)$ であらわす。この記号を用いて、$\mathrm{End}\,(V_1 \otimes V_2 \otimes \mathrm{End}(V_3 \otimes \cdots \otimes V_n))$ に値を持つ有理関数 $X_n^{[12]}$ を次の式で定める: $A \in \mathrm{End}\,(V_3 \otimes \cdots \otimes V_n)$ に対して

$$\begin{aligned} X_n^{[12]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(A) := \frac{1}{\lambda_{12}} \frac{1}{\prod_{p=3}^n \lambda_{1p}\lambda_{2p}} \times \mathrm{Tr}_{\lambda_{12}}\Big(& L_n\big(\frac{\lambda_{1n}+\lambda_{2n}}{2}\big) \cdots L_2\big(\frac{\lambda_{12}}{2}\big) \\ & \times P_{12} A L_2\big(\frac{\lambda_{21}}{2}\big) \cdots L_n\big(\frac{\lambda_{n1}+\lambda_{n2}}{2}\big)\Big) \end{aligned}$$

とおく。

このとき留数の計算は次のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} & \mathrm{res}_{\lambda_1=\lambda_2-k-1} h_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \\ & \quad = (-1)^k X_n^{[12]}(\lambda_2-k-1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\Big(h_{n-2}(\lambda_3, \cdots, \lambda_n)\Big) \\ & \quad = \mathrm{res}_{\lambda_1=\lambda_2-k-1}\Big(\omega(\lambda_{12}) X_n^{[12]}(\lambda_2-k-1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\Big(h_{n-2}(\lambda_3, \cdots, \lambda_n)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Ansatz において $\lambda_1 = \lambda_2 - k - 1$ に極を持つのは $\omega(\lambda_{12})$ のみである。その係数は λ_1 については有理的だから十分多くの値がわかれば決定される。これから、右辺の $X^{[12]}$ が求めるものであることがわかる。

4. 結果

前節の計算を実行すると次の表示に到達する。一般に $i < j$ に対して

$$\begin{aligned} \Omega_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(A) &:= \omega(\lambda_{ij}) \times X_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(A), \\ X_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)(A) &:= \mathbf{R}^{[ij]} X_n^{[12]}(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)(A)(\mathbf{R}^{[ij]})^{-1}, \qquad (0.7) \\ \mathbf{R}^{[ij]} &:= R_{ii-1}(\lambda_{ii-1}) \cdots R_{i1}(\lambda_{i1}) R_{jj-1}(\lambda_{jj-1}) \overset{\hat{i}}{\cdots} R_{j1}(\lambda_{j1}) \end{aligned}$$

とおく。

定理 上の記号のもとに

$$h_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_m \\ i_1 < j_1, \cdots, i_m < j_m}} f_{n,(i_1 j_1), \cdots, (i_m j_m)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

$$\begin{aligned} & f_{n,(i_1 j_1), \cdots, (i_m j_m)}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \\ & = \frac{1}{2^{n-2m}} \Omega_n^{[i_1 j_1]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \circ \cdots \circ \Omega_{n-2m+2}^{[i_m j_m]}(\lambda_1, \overset{i_1, \cdots, j_{m-1}}{\cdots}, \lambda_n)(1). \end{aligned}$$

構成から、λ_1 の関数として両辺の留数は一致している。そこで $\lambda_1 \to \infty$ における漸近挙動が一致することを確かめ, Phragmen-Lindelöf の定理を適用することにより定理が従う。

5. XXZ 模型（予想）

最後に XXZ モデル

$$H_{XXZ} := -\sum_{j=1}^{L} \left(\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\right)$$

の相関関数について触れる。$\Delta = \cos \pi\nu$ は実のパラメタで

- $\nu \in i\mathbb{R}_{>0}$ (massive regime)
- $0 < \nu < 1$ (massless regime)

のいずれかを考える。斉次鎖の相関関数の積分は [7, 8, 11] などで研究されている。

XXX モデルの場合と同様に、相関関数の留数はトレースを用いて計算できる。今の場合, $q := e^{\pi i \nu}$ として $a \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ に対し $\mathrm{Tr}_x a$ が

$$\mathrm{Tr}_{k+1} a = \mathrm{tr}_{V^{(k)}} \pi^{(k)}(a) \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

で定義される. 今度は x の多項式ではなく、

$$\mathrm{Tr}_x(a) = -xF(x) + G(x) \qquad (F, G \text{ は } q^x \text{ の多項式})$$

の形になることがわかる。このことに対応して、Ansatz には 2 つの超越関数が必要になる。

次のように定めよう。

$$\omega_1(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} \log \widetilde{\rho}(\lambda) + \frac{1}{4} \frac{[2\lambda]}{[\lambda+1][\lambda-1]},$$
$$\omega_2(\lambda) := \frac{d}{d\lambda} \log \rho(\lambda) + \frac{1}{4} \frac{[2]}{[\lambda+1][\lambda-1]},$$

ただし $[\lambda] := \sin \pi\nu\lambda / \sin \pi\nu$, また $\rho(\lambda), \widetilde{\rho}(\lambda)$ は次の式で定める。
massive regime:

$$\rho(\lambda) = -\zeta \frac{(\zeta^{-2})_\infty (q^2\zeta^2)_\infty}{(\zeta^2)_\infty (q^2\zeta^{-2})_\infty},$$
$$\widetilde{\rho}(\lambda) = \frac{\{q^2\zeta^2\}\{q^6\zeta^2\}}{\{q^4\zeta^2\}^2} \frac{\{q^2\zeta^{-2}\}\{q^6\zeta^{-2}\}}{\{q^4\zeta^{-2}\}^2},$$

ただし $(z)_\infty = (z; q^4)_\infty$, $\zeta = e^{\pi i \nu \lambda}$, $\{z\} = (z; q^4, q^4)_\infty$.

massless regime:

$$\rho(\lambda) = -\frac{S_2(-\lambda)S_2(1+\lambda)}{S_2(\lambda)S_2(1-\lambda)},$$
$$\widetilde{\rho}(\lambda) = \frac{S_3(1-\lambda)S_3(1+\lambda)S_3(3-\lambda)S_3(3+\lambda)}{S_3(2-\lambda)^2S_3(2+\lambda)^2}.$$

ただし $S_2(\lambda) = S_2(\lambda|2, 1/\nu)$ は double sine 関数, $S_3(\lambda) = S_2(\lambda|2, 2, 1/\nu)$ は triple sine 関数.

このとき次の予想がある:

予想 $X_n^{[ij]}$ を (0.7) と同様に定義して

$$X_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) := -\lambda_{ij}F_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) + G_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

と表わし、Ω_n の定義を

$$\Omega_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) := \omega_1(\lambda_{ij})F_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) + \omega_2(\lambda_{ij})G_n^{[ij]}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

でおきかえれば、XXZ の場合にも BKS Ansatz が成り立つ。 □

追記：講演の後、BKS Ansatz の式が qKZ 方程式 (の reduction) を満たすことは確認された。

References

[1] H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama, A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model, hep-th/0405044.

[2] H. Boos and V. Korepin, Quantum spin chains and Riemann zeta functions with odd arguments, hep-th/0104008, *J. Phys.* **A 34** (2001) 5311–5316.

[3] H. Boos, V. Korepin and F. Smirnov, Emptiness formation probability and quantum Knizhnik-Zamlodchikov equation, hep-th/0209246, *Nucl. Phys. B* Vol. 658/3 (2003) 417 –439.

[4] H. Boos, V. Korepin and F. Smirnov, New formulae for solutions of quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations on level −4, hep-th/0304077, *J. Phys.* **A 37** (2004) 323–336.

[5] H. Boos, V. Korepin and F. Smirnov, New formulae for solutions of quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations on level −4 and correlation functions, hep-th/0305135,

[6] M. Jimbo, T. Miwa, K. Miki and A. Nakayashiki, Correlation functions of the XXZ model for $\Delta < -1$, *Phys. Lett. A* **168** (1992), 256–263.

[7] G. Kato, M. Shiroishi, M. Takahashi, K. Sakai, Third-neighbor and other four-point correlation functions of spin-1/2 XXZ chain, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) L337.

[8] G. Kato, M. Shiroishi, M. Takahashi, K. Sakai, Next Nearest-Neighbor Correlation Functions of the Spin-1/2 XXZ Chain at Critical Region, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 5097.

[9] N. Kitanine, J.-M. Maillet and V. Terras, Correlation functions of the XXZ Heisenberg spin-$\frac{1}{2}$-chain in a magnetic field, *Nucl. Phys. B* **567** (2000), 554–582.

[10] M. Takahashi, Half-filled Hubbard model at low temperature, *J. Phys. C* **10**(1977) 1298

[11] M. Takahashi, G. Kato, M. Shiroishi, Next Nearest-Neighbor Correlation Functions of the Spin-1/2 XXZ Chain at Massive Region, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73** (2004) 245.